(a) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^3 \cdot (x+1)$

Αν υποθέσουμε ότι η μέθοδος Newton-Raphson (N-R) συγκλίνει στη ρίζα $\xi = 1$ της εξίσωσης $f(x) = 0$ τότε, να βρεθεί η τάξη σύγκλισης της.
(Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.)

ΛΥΣΗ

Όταν έχουμε μέθοδο N-R και αυτή συγκλίνει στην απλή ρίζα της εξίσωσης τότε η τάξη σύγκλισης είναι ίση με 2 (δηλ. συγκλίνει τετραγωνικά). Αλλά, όταν η ρίζα είναι πολλαπλή τότε γνωρίζουμε ότι η τάξη σύγκλισης της μεθόδου είναι ίση με 1 (δηλ. συγκλίνει γραμμικά). Άρα, θα πρέπει να εξετάσουμε εάν η $\xi = 1$ είναι απλή ή ρίζα πολλαπλότητας

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 \cdot (x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$

$x = 1$ (πολ/τητα 3) και $x = -1$

$f'(x) = 3(x-1)^2 \cdot (x+1) + (x-1)^3 = (x-1)^2 \cdot \left(3(x+1) + (x-1)\right) =$

$= (x-1)^2 \cdot (4x+2) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -2$

(πολ/τα 2)

$f''(x) = 2(x-1) \cdot (4x-2) + (x-1)^2 \cdot 4 =$

$= 12x^2 - 12x = 12x(x-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$ (πολ/τα 1)

$f'''(x) = 24x - 12 \Rightarrow f'''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Άρα το $x = 1$ δεν αποτελεί ρίζα της f'''

$f(\xi) = f'(\xi) = f''(\xi)$ και $f'''(\xi) \neq 0$

↳ Η ρίζα ξ είναι πολ/τας 3

άρα η Μέθοδος N-R συγκλίνει γραμμικά

(β) Στη συνέχεια να επιλέξετε και να εφαρμόσετε μια μορφή της μεθόδου N-R με τετραγωνική ταχύτητα σύγκλισης για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής τιμής x_2 (δύο επαναλήψεις) της ρίζας $\xi=1$ για $x_0=0$

ΛΥΣΗ

Η Μέθοδος N-R μας αναφέρει ότι:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \text{ για πολ/τα } 1$$

και

$$x_{k+1} = x_k - k \cdot \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \text{ για πολ/τα } k$$

Δηλ.

$$x_{k+1} = x_k - 3 \cdot \frac{(x_k-1)^{\cancel{3}} \cdot (x_k+1)}{\cancel{(x_k-1)^2} \cdot (4x_k+2)} =$$

$$= x_k - 3 \cdot \frac{(x_k^2-1)}{4x_k+2}, \text{ με ταχ. σύγκλισης } (p)\ 2.$$

- για $x_0=0 \overset{k=0}{\rightsquigarrow} x_1 = \cancel{x_0}^{0} - 3\frac{(\cancel{x_0}^{0\,2}-1)}{4\cancel{x_0}^{0}+2} = \frac{3}{2} = 1,5$

- για $x_1 = 1,5 \overset{k=1}{\rightsquigarrow} x_2 = x_1 - 3\frac{(x_1^2-1)}{4x_1+2} = 1,03125$

Με τη 2η προσέγγιση